Über die orthogonalen Funktionen. IX
(Absolute Summation)

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

Herrn Professor László Rédei zum 60. Geburtstag

Das n-te $(C, 1)$-Mittel der Orthogonalreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \tag{1}$$

sei mit $\sigma_n(x)$ bezeichnet. Wir sagen, daß (1) an der Stelle x $|C, 1|$-summierbar ist, wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x)| < \infty \tag{2}$$

gilt. Wir setzen zur Abkürzung

$$A_m = (a_{2^m+1}^2 + \cdots + a_{2^{m+1}}^2)^{1/2} \qquad (m = 0, 1, \ldots).$$

Es wird der folgende Satz bewiesen:

Satz. *Die Bedingung*

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m < \infty \tag{3}$$

ist notwendig und hinreichend dafür, daß die Orthogonalreihe (1) *für jedes orthonormierte Funktionensystem* $\{\varphi_k(x)\}$ *im Grundintervall* $[a, b]$ *fast überall* $|C, 1|$*-summierbar ist.*

Früher hat G. ALEXITS[1]) bewiesen, daß im Falle $a_k = O(q_k)$, wo $\{q_k\}$ eine positive, monoton nichtwachsende Zahlenfolge mit der Eigenschaft

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k k^{-\frac{1}{2}} < \infty$$

[1]) G. ALEXITS, Ein Summationssatz für Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 7 (1956), 5—9.

bedeutet, die Orthogonalreihe (1) für jedes orthonormierte Funktionensystem $\{\varphi_k(x)\}$ in $[a, b]$ fast überall $(C, 1)$-summierbar ist.

In einem Brief hat mich Herr G. ALEXITS darauf aufmerksam gemacht, daß aus den Bedingungen seines Satzes auch (2) in $[a, b]$ fast überall folgt. Da für eine positive, monoton nichtwachsende Folge $\{a_k\}$ die Beziehungen (3) und

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k k^{-\frac{1}{2}} < \infty$$

gleichwertig sind, ist unser Satz offensichtlich eine Verallgemeinerung des Satzes von G. ALEXITS.

Beweis des Satzes. *Hinlänglichkeit.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $a_0 = a_1 = 0$ angenommen werden. Auf Grund von (3) ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |\sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x)|\, dx = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b (\sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x))^2 dx \right\}^{1/2} =$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \sum_{k=2}^{n+1} k^2 a_k^2 \right\}^{1/2} = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{m=0}^{[\log(n+1)]} 2^{m+1} A_m =$$

$$= O(1) \sum_{m=0}^{\infty} A_m 2^{m+1} \sum_{\substack{n \\ \log(n+1) \geqq m}} \frac{1}{n^2} = O(1) \sum_{m=0}^{\infty} A_m < \infty,$$ [2])

woraus sich durch Anwendung des B. Levischen Satzes die Gültigkeit von (2) in $[a, b]$ fast überall ergibt.

Notwendigkeit. Wir nehmen an, (3) sei für eine Zahlenfolge $\{a_k\}$ nicht richtig und werden dann eine Orthogonalreihe mit den Koeffizienten a_k konstruieren, die fast überall nicht $|C, 1|$-summierbar ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $a_k = 0$ $(0 \leqq k \leqq 16)$, $a_k \geqq 0$ $(k > 16)$ und $[a, b] = [0, 1]$ gewählt werden. Es seien b_k rationale Zahlen mit $b_k = 0$ $(0 \leqq k \leqq 16)$, $0 < c_k = b_k - a_k \leqq k^{-2}$ $(k > 16)$. Da

$$B_m = (b_{2^m+1}^2 + \cdots + b_{2^{m+1}}^2)^{1/2} \geqq A_m \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

gilt, so ist nach (3)

$$\sum_{m=4}^{\infty} B_m = \infty. \tag{4}$$

Wir definieren zwei Folgen von natürlichen Zahlen $\{M(\mu)\}$ $(1 = M(0) < \cdots < M(\mu) < \cdots)$ und $\{m(\mu)\}$ $(0 \leqq m(\mu) \leqq 3;\ \mu = 1, 2, \ldots)$ mit der folgenden

[2]) $[\log(n+1)]$ bezeichnet den ganzen Teil von $\log(n+1)$.

Eigenschaft: für jede natürliche Zahl μ $(\geqq 1)$ gilt

$$(5) \qquad 4\sum_{m=4}^{4M(\mu-1)-1} B_m \leqq \sum_{\nu=M(\mu-1)}^{M(\mu)-2} B_{4\nu+m(\mu)}.$$

Es seien nämlich $M(0)=1$, $M(1)=3$ und $m(1)=0$. Offensichtlich besteht dann (5) für $\mu=1$. Es sei ferner μ_0 $(\geqq 1)$ eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, $M(\mu)$ $(0\leqq\mu\leqq\mu_0)$ und $m(\mu)$ $(0\leqq m(\mu)\leqq 3)$ $(1\leqq\mu\leqq\mu_0)$ seien schon derart definiert, daß (5) für $\mu=1,\ldots,\mu_0$ besteht. Wegen (4) ist

$$\sum_{m=4M(\mu_0)}^{\infty} B_m=\infty,$$

daher gibt es einen Index $m(\mu_0+1)$ $(0\leqq m(\mu_0+1)\leqq 3)$, so daß

$$\sum_{\nu=M(\mu_0)}^{\infty} B_{4\nu+m(\mu_0+1)}=\infty$$

ist. Es sei $M(\mu_0+1)$ $(\geqq M(\mu_0)+2)$ die kleinste natürliche Zahl, für die

$$4\sum_{m=4}^{4M(\mu_0)-1} B_m \leqq \sum_{\nu=M(\mu_0)}^{M(\mu_0+1)-2} B_{4\nu+m(\mu_0+1)}$$

gilt. Dann ist (5) auch für $\mu=\mu_0+1$ erfüllt und damit die Folgen $\{M(\mu)\}$ und $\{m(\mu)\}$ mit den erwähnten Eigenschaften durch Induktion definiert.

Für jedes μ $(\geqq 1)$ wird die Menge der Indizes $4M(\mu-1)+m(\mu)$, $4(M(\mu-1)+1)+m(\mu),\ldots,4(M(\mu)-2)+m(\mu)$ mit $J'(\mu)$ bezeichnet und $J''(\mu)$ bedeutet die Menge der Indizes m, für die $4M(\mu-1)\leqq m<4M(\mu)$ und $m\notin J'(\mu)$ erfüllt sind.

Es wird nun ein im Intervall $[0,1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\Phi_k(x)$ $(k=0,1,\ldots)$ und eine Folge von einfachen Mengen $F_\mu(\subseteq[0,1])$ $(\mu=1,2,\ldots)$ definiert,[3]) für welche die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Die Mengen F_μ sind stochastisch unabhängig und für jedes μ gilt

$$(6) \qquad \operatorname{mes}(F_\mu)=\frac{1}{2}\,{}^{4)};$$

die Abschätzung

$$(7) \qquad b_{2^m+1}|\Phi_{2^m+1}(x)|+\cdots+b_{2^{m+1}}|\Phi_{2^{m+1}}(x)|\leqq\sqrt{2}\,B_m \qquad (0\leqq x\leqq 1)$$

[3]) D. h. für jedes $\Phi_k(x)$ kann das Intervall $[0,1]$ in endlich viele Teilintervalle zerlegt werden, derart, daß $\Phi_k(x)$ in jedem Teilintervall konstant ist; jede Menge F_μ ist die Vereinigung endlich vieler Intervalle.

[4]) Mit $\operatorname{mes}(H)$ wird das Lebesguesche Maß der Menge H bezeichnet.

besteht für jedes m $(\geqq 4)$; ferner gelten die folgenden Beziehungen:

(8) $$b_{2^m+1}|\Phi_{2^m+1}(x)|+\cdots+b_{2^{m+1}}|\Phi_{2^{m+1}}(x)|=\sqrt{2}B_m \qquad (x\in F_\mu;\ m\in J'(\mu)),$$

(9) $$\Phi_k(x)\Phi_l(x)=0 \qquad (x\in F_\mu;\ k\neq l,\ 2^m<k,\ l\leqq 2^{m+1},\ m\in J'(\mu)),$$

außerdem

(10) $$\Phi_k(x)=0 \qquad (x\in F_\mu;\ 2^m<k\leqq 2^{m+1},\ m\in J''(\mu)).$$

Es seien $\Phi_k(x)=r_k(x)$ $(k=0,\ldots,16=2^{4M(0)})$, wo $r_k(x)=\operatorname{sign}\sin 2^k\pi x$ die k-te Rademachersche Funktion bedeutet. Diese sind Treppenfunktionen und bilden in $[0,1]$ ein orthonormiertes Funktionensystem.

Es sei μ_0 $(\geqq 1)$ eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\Phi_k(x)$ $(0\leqq k\leqq 2^{4M(\mu_0-1)})$ und die einfachen Mengen F_μ $(1\leqq\mu\leqq\leqq\mu_0-1)$ schon definiert sind, derart, daß diese Funktionen in $[0,1]$ ein orthonormiertes System bilden, die Mengen $F_1,\ldots,F_{\mu_0-1}$ stochastisch unabhängig sind, die Abschätzung (7) für $m=4,\ldots,4M(\mu_0-1)-1$ und die Beziehungen (8)—(10) für $\mu=1,\ldots,\mu_0-1$ erfüllt sind.

Dann kann das Intervall $[0,1]$ in endlich viele Teilintervalle $I(r)$ $(1\leqq r\leqq\varrho)$ eingeteilt werden, derart, daß in den einzelnen Teilintervallen $I(r)$ jede Funktion $\Phi_k(x)$ $(0\leqq k\leqq 2^{4M(\mu_0-1)})$ konstant ist und jede Menge F_μ $(1\leqq\mu\leqq\mu_0-1)$ die Vereinigung einiger $I(r)$ ist. Mit $I'(r)$ bzw. $I''(r)$ werden die zwei Hälften des Intervalls $I(r)$ bezeichnet. Wir schreiben die rationalen Zahlen $\frac{b_k^2}{B_m^2}$ $(2^m<k\leqq 2^{m+1},\ 4M(\mu_0-1)\leqq m<4M(\mu_0))$ als Brüche natürlicher Zahlen mit gemeinsamem Nenner auf: $\frac{b_k^2}{B_m^2}=\frac{p_k}{q(\mu_0)}$ und teilen jedes Intervall $I'(r)$ in $q(\mu_0)$ Teilintervalle gleicher Länge: $I'(r,i,\mu_0)$ $(1\leqq i\leqq q(\mu_0))$. Es sei

(11) $$\Phi_k(x)=\sqrt{2}\,\frac{B_m}{b_k}\sum_{r=1}^{\varrho}\ \sum_{i=p_{2^m+1}+\cdots+p_{k-1}+1}^{p_{2^m+1}+\cdots+p_k} r_m(x;\,I'(r,i,\mu_0))\ [5]$$

für $2^m<k\leqq 2^{m+1}$ mit $m\in J'(\mu_0)$. Ähnlich teilen wir auch jedes Intervall $I''(r)$ in $q(\mu_0)$ Teilintervalle gleicher Länge: $I''(r,i,\mu_0)$ $(1\leqq i\leqq q(\mu_0))$ und setzen

(12) $$\Phi_k(x)=\sqrt{2}\,\frac{B_m}{b_k}\sum_{r=1}^{\varrho}\ \sum_{i=p_{2^m+1}+\cdots+p_{k-1}+1}^{p_{2^m+1}+\cdots+p_k} r_m(x;\,I''(r,i,\mu_0))$$

---

[5]) Ist $I=[u,v]$ ein endliches Intervall und $f(x)$ eine in $[0,1]$ definierte Funktion, so sei $f(x;I)=f\left(\frac{x-u}{v-u}\right)$ für $u<x<v$ und $f(x;I)=0$ sonst. Offensichtlich gilt für jede in $[0,1]$ quadratisch integrierbare Funktion $f(x)$ und $g(x)$:

$$\int_u^v f(x;I)g(x;I)\,dx=\operatorname{mes}(I)\int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

für $2^m < k \leqq 2^{m+1}$ mit $m \in J''(\mu_0)$. Es sei weiterhin F_{μ_0} die Menge, die aus der Vereinigung

$$\bigcup_{r=1}^{\varrho} I'(r)$$

nach Weglassen der endlich vielen Punkte zurückbleibt, in welchen die Funktionen $\Phi_k(x)$ $(2^{4M(\mu_0-1)} < k \leqq 2^{4M(\mu_0)})$ verschwinden.

Offensichtlich sind die Funktionen $\Phi_k(x)$ $(2^{4M(\mu_0-1)} < k \leqq 2^{4M(\mu_0)})$ Treppenfunktionen, die Menge F_{μ_0} ist einfach, die Funktionen $\Phi_k(x)$ $(0 \leqq k \leqq \leqq 2^{4M(\mu_0)})$ bilden in $[0, 1]$ ein orthonormiertes System und die Mengen $F_1, \ldots, F_{\mu_0}$ sind stochastisch unabhängig.

Da die Intervalle $I'(r)$ paarweise disjunkt sind und die Beziehungen

$$\operatorname{mes}(I'(r)) = \frac{1}{2} \operatorname{mes}(I(r)) \quad (1 \leqq r \leqq \varrho), \qquad \sum_{r=1}^{\varrho} \operatorname{mes}(I(r)) = 1$$

definitionsgemäß gelten, ist

$$\operatorname{mes}(F_{\mu_0}) = \sum_{r=1}^{\varrho} \operatorname{mes}(I'(r)) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\varrho} \operatorname{mes}((Ir)) = \frac{1}{2};$$

also wird (6) auch für $\mu = \mu_0$ erfüllt.

Es sei $m \in J'(\mu_0)$. Ist $x \in (0, 1)$, dann gilt $x \in I'(r, i, \mu_0)$ bzw. $x \in I''(r, i, \mu_0)$ nur für ein gewisses r und i. Nach (11) bzw. (12) ist dann die Summe $b_{2^m+1} |\Phi_{2^m+1}(x)| + \cdots + b_{2^{m+1}} |\Phi_{2^{m+1}}(x)|$ gleich $\sqrt{2} B_m |r_m(x; I'(r, i, \mu_0))| \leqq \sqrt{2} B_m$ bzw. $= 0$. Somit besteht (7) für $m \in J'(\mu_0)$. Ähnlich kann eingesehen werden, daß (7) auch für $m \in J''(\mu_0)$ besteht; also gilt (7) für jedes $m = 4M(\mu_0 - 1), \ldots, 4M(\mu_0) - 1$.

Ist $x \in F_{\mu_0}$, dann gilt $x \in I'(r, i, \mu_0)$ nur für ein gewisses r und i. Dann folgt für $m \in J'(\mu_0)$ aus (11) und aus der Definition von F_{μ_0}

$$b_{2^m+1} |\Phi_{2^m+1}(x)| + \cdots + b_{2^{m+1}} |\Phi_{2^{m+1}}(x)| = \sqrt{2} B_m |r_m(x; I'(r, i, \mu_0))| = \sqrt{2} B_m.$$

Also ist (8) für $\mu = \mu_0$ erfüllt.

Es sei $2^m < k \leqq 2^{m+1}$ mit $m \in J'(\mu_0)$. Nach (11) ist $\Phi_k(x) \neq 0$ nur in der Menge $E_k = \bigcup_{r=1}^{\varrho} \bigcup_{i=p_{2^m+1}+\cdots+p_{k-1}+1}^{p_{2^m+1}+\cdots+p_k} I'(r, i, \mu_0)$, ferner gilt $E_k \cap E_l = O$ für $2^m < k, l \leqq \leqq 2^{m+1}$, $k \neq l$, also ist (9) für $\mu = \mu_0$ erfüllt.

Es sei $2^m < k \leqq 2^{m+1}$ mit $m \in J''(\mu_0)$. Nach (12) ist $\Phi_k(x) = 0$ in der Menge $\bigcup_{r=1}^{\varrho} I'(r)$ $(\supseteq F_{\mu_0})$, woraus (10) für $\mu = \mu_0$ folgt.

Vollständige Induktion ergibt sodann ein unendliches Funktionensystem $\{\Phi_k(x)\}$ und eine unendliche Mengenfolge $\{F_\mu\}$ mit den erwähnten Eigenschaften.

Mit $\sigma_n^*(x)$ wird das n-te $(C,1)$-Mittel der Orthogonalreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \Phi_n(x)$$

bezeichnet.

Es sei $x \in F_\mu$ und $M(\mu-1) \leqq \nu < M(\mu)-2$. Dann ist

$$\left|\sigma^*_{2^{4(\nu+1)+m(\mu)}}(x) - \sigma^*_{2^{4\nu+m(\mu)}}(x)\right| \geqq$$

$$\geqq \left| \sum_{k=2^{4\nu+m(\mu)}+1}^{2^{4(\nu+1)+m(\mu)}} \left(1-\frac{k}{2^{4(\nu+1)+m(\mu)}+1}\right) b_k \Phi_k(x)\right| - \tag{13}$$

$$-\left|\sum_{k=17}^{2^{4\nu+m(\mu)}} \left(\frac{1}{2^{4\nu+m(\mu)}+1} - \frac{1}{2^{4(\nu+1)+m(\mu)}+1}\right) k b_k \Phi_k(x)\right| = S - R.$$

Wegen $x \in F_\mu$ folgt aus (10) $\Phi_k(x) = 0$ $(k = 2^{4\nu+m(\mu)+1}+1, \ldots, 2^{4(\nu+1)+m(\mu)})$ und daher ist

$$S = \left| \sum_{k=2^{4\nu+m(\mu)}+1}^{2^{4\nu+m(\mu)+1}} \left(1-\frac{k}{2^{4(\nu+1)+m(\mu)}+1}\right) b_k \Phi_k(x)\right|. \tag{14}$$

Da $x \in F_\mu$ und $4\nu+m(\mu) \in J'(\mu)$ gelten, folgt

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=2^{4\nu+m(\mu)}+1}^{2^{4\nu+m(\mu)+1}} \left(1-\frac{k}{2^{4(\nu+1)+m(\mu)}+1}\right) b_k \Phi_k(x)\right| = \\ &= \sum_{k=2^{4\nu+m(\mu)}+1}^{2^{4\nu+m(\mu)+1}} \left(1-\frac{k}{2^{4(\nu+1)+m(\mu)}+1}\right) b_k |\Phi_k(x)| \end{aligned} \tag{15}$$

auf Grund von (9). Aus (14) und (15) folgt durch einfache Rechnung

$$S \geqq \frac{14}{16} \sum_{k=2^{4\nu+m(\mu)}+1}^{2^{4\nu+m(\mu)+1}} b_k |\Phi_k(x)|;$$

Da $x \in F_\mu$ und $4\nu+m(\mu) \in J'(\mu)$, ergibt sich auf Grund von (8):

$$S \geqq \sqrt{2}\, \frac{14}{16} B_{4\nu+m(\mu)}. \tag{16}$$

Einfache Rechnung ergibt

$$R \leqq 16 \frac{1}{2^{4(\nu+1)+m(\mu)}} \sum_{m=4}^{4\nu+m(\mu)-1} 2^{m+1} \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} b_k |\Phi_k(x)|;$$

bei Beachtung von (10) und (7) folgt daraus

$$R \leqq \frac{\sqrt{2}}{2^{4\nu}} \left(2^{4M(\mu-1)} \sum_{m=4}^{4M(\mu-1)-1} B_m + 2 \sum_{l=M(\mu-1)}^{\nu-1} 2^{4l} B_{4l+m(\mu)}\right). \tag{17}$$

Aus (13), (16) und (17) ergibt sich somit

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\nu=M(\mu-1)}^{M(\mu)-2} |\sigma^*_{2^{4(\nu+1)+m(\mu)}}(x)-\sigma^*_{2^{4\nu+m(\mu)}}(x)| \geqq \\
(18)\quad &\geqq \sqrt{2}\left(\frac{14}{16}\sum_{\nu=M(\mu-1)}^{M(\mu)-2} B_{4\nu+m(\mu)} - 2\sum_{\nu=M(\mu-1)}^{M(\mu-2)} \frac{1}{2^{4\nu}}\sum_{l=M(\mu-1)}^{\nu-1} 2^{4l} B_{4l+m(\mu)} - \right. \\
&\left. -\sum_{m=4}^{4M(\mu-1)-1} B_m 2^{4M(\mu-1)} \sum_{\nu=M(\mu-1)}^{M(\mu)-2} \frac{1}{2^{4\nu}}\right).
\end{aligned}
$$

Es gilt aber

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\nu=M(\mu-1)}^{M(\mu)-2} \frac{1}{2^{4\nu}} \sum_{l=M(\mu-1)}^{\nu-1} 2^{4l} B_{4l+m(\mu)} = \\
(19)\quad &= \sum_{l=M(\mu-1)}^{M(\mu)-3} B_{4l+m(\mu)} 2^{4l} \sum_{\nu=l+1}^{M(\mu)-2} \frac{1}{2^{4\nu}} \leqq \frac{1}{15} \sum_{\nu=M(\mu-1)}^{M(\mu)-2} B_{4\nu+m(\mu)}
\end{aligned}
$$

und

$$
(20)\quad \sum_{\nu=M(\mu-1)}^{M(\mu)-2} \frac{1}{2^{4\nu}} \leqq \frac{1}{2^{4M(\mu-1)}}\frac{16}{15}.
$$

Aus (18), (19) und (20) folgt daher, daß

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\nu=M(\mu-1)}^{M(\mu)-2} |\sigma^*_{2^{4(\nu+1)+m(\mu)}}(x)-\sigma^*_{2^{4\nu+m(\mu)}}(x)| \geqq \\
&\geqq \sqrt{2}\left(\frac{2}{3}\sum_{\nu=M(\mu-1)}^{M(\mu)-2} B_{4\nu+m(\mu)} - \frac{4}{3}\sum_{m=4}^{4M(\mu-1)-1} B_m\right)
\end{aligned}
$$

für $x \in F_\mu$ gilt. Auf Grund von (5) ergibt sich, daß

$$
(21)\quad \sum_{\nu=M(\mu-1)}^{M(\mu)-2} |\sigma^*_{2^{4(\nu+1)+m(\mu)}}(x)-\sigma^*_{2^{4\nu+m(\mu)}}(x)| \geqq \frac{\sqrt{2}}{3}\sum_{m=0}^{4M(\mu-1)-1} B_m \qquad (x \in F_\mu)
$$

für jedes μ besteht.

Aus der stochastischen Unabhängigkeit der Mengen F_μ folgt wegen (6) durch Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas $\operatorname{mes}(\overline{\lim_{\mu\to\infty}} F_\mu)=1$. Für $x \in F_\mu$ erhalten wir nach (21):

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{2^{4M(\mu)}} |\sigma^*_{n+1}(x)-\sigma^*_n(x)| \geqq \sum_{n=2^{4M(\mu-1)+m(\mu)}}^{2^{4(M(\mu)-1)+m(\mu)-1}} |\sigma^*_{n+1}(x)-\sigma^*_n(x)| \geqq \\
&\geqq \sum_{\nu=M(\mu-1)}^{M(\mu)-2} |\sigma^*_{2^{4(\nu+1)+m(\mu)}}(x)-\sigma^*_{2^{4\nu+m(\mu)}}(x)| \geqq \frac{\sqrt{2}}{3}\sum_{m=0}^{4M(\mu-1)-1} B_m .
\end{aligned}
$$

Ist $x \in \overline{\lim_{\mu\to\infty}} F_\mu$, so gilt diese Abschätzung für unendlich viele μ, und mithin gilt wegen (4)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_{n+1}^{*}(x) - \sigma_{n}^{*}(x)| = \infty, \tag{22}$$

also ist (22) in [0, 1] fast überall erfüllt.

Mit $\sigma_n^{**}(x)$ wird das n-te $(C, 1)$-Mittel der Orthogonalreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \Phi_k(x)$$

bezeichnet. Nach der Definition der Konstanten c_k gilt

$$\sum_{m=0}^{\infty} (c_{2^m+1}^2 + \cdots + c_{2^{m+1}}^2)^{1/2} \leqq \sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty.$$

Auf Grund der Hinlänglichkeit der Bedingung (3) ist also

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_{n+1}^{**}(x) - \sigma_n^{**}(x)| < \infty \tag{23}$$

fast überall in [0, 1]. Mit $\bar{\sigma}_n(x)$ wird das n-te $(C, 1)$-Mittel der Orthogonalreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_k(x) \tag{24}$$

bezeichnet. Da

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\bar{\sigma}_{n+1}(x) - \bar{\sigma}_n(x)| \geqq \sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_{n+1}^{*}(x) - \sigma_n^{*}(x)| - \sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_{n+1}^{**}(x) - \sigma_n^{**}(x)|$$

ist, folgt aus (22) und (23), daß die Orthogonalreihe (24) in [0, 1] fast überall nicht $|C, 1|$-summierbar ist.

Damit haben wir unseren Satz vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 22. März 1960)